



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**CONTROLE DE CAOS, SINCRONIZAÇÃO E DINÂMICA NÃO
LINEAR
FASE 1 - ESTUDO INTRODUTÓRIO**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: guirns@gmail.com

Elbert E. N. Macau (LAC/CTE/INPE, Orientador)
E-mail: elbert@lac.inpe.br

Julho de 2009

CONTROLE DE CAOS, SINCRONIZAÇÃO E DINÂMICA NÃO LINEAR

Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza¹ (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)
Elbert E. N. Macau² (LAC/INPE, Orientador)

RESUMO

O trabalho de iniciação científica, iniciado em agosto de 2008, tem como objetivo o estudo de sistemas dinâmicos não lineares e suas propriedades, com fim de controle da estabilidade e previsão de seu comportamento, bem como estudo de osciladores e sincronização.

Inicialmente foram vistos os conceitos básicos de sistemas dinâmicos, através dos conjuntos de Julia e Mandelbrot, que mesmo tendo uma definição relativamente simples, já exibe propriedades de caos e de fractais. Usando como base o sistema dinâmico do pêndulo amortecido forçado, foram vistos outros conceitos e ferramentas que auxiliam a análise dos sistemas, tais como: análise gráfica, que permite ver a evolução do sistema com o tempo; espaço de fase e seção de Poincaré, que possibilitam a representação de sistemas de várias dimensões em um número menor dessas; expoente de Lyapunov, para a previsão do comportamento do sistema; diagrama de bifurcação, que fornece uma visão geral do comportamento do sistema em um intervalo; travamento de fase, no qual um sistema apresenta regiões de seus parâmetros na qual é estável, e regiões caóticas; entre outros. Foi estudado também a previsão do comportamento de sistemas caóticos com base em um certo número de dados experimentais e métodos que forcem o sistema a ir para um estado estável em vez de um caótico. Para cada uma dessas ferramentas ou conceitos foram criados programas que o simulam, possibilitando um estudo mais aprofundado dos casos apresentados nos livros, bem como a elaboração de novos casos. Esses programas servem ainda de base para aplicações mais avançadas a serem feitas nos próximos tópicos de estudo. Por fim está sendo lido sobre modelos de osciladores, que servirá de base para os próximos estudos.

¹ Aluno do Curso de Engenharia de Computação, ITA. **E-mail: guirns@gmail.com**

² Pesquisador do Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada. **E-mail: elbert@lac.inpe.br**

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

- 2.1 Iterações e sistemas dinâmicos
- 2.2 Análise gráfica
- 2.3 Diagramas de Bifurcação
- 2.4 Números complexos
- 2.5 Dimensão e fractais
- 2.6 Expoente de Lyapunov

CAPÍTULO 3 – DESENVOLVIMENTO

- 3.1 Espaço de fase
- 3.2 Seções de Poincaré
- 3.3 Diagrama de Bifurcação
- 3.4 Expoente de Lyapunov

CAPÍTULO 4 – DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

CAPÍTULO 6 – BIBLIOGRAFIA

1. INTRODUÇÃO

Um *sistema dinâmico* consiste na descrição da evolução no tempo do comportamento de algum sistema (que pode ou não ter uma interpretação física), como por exemplo a população de uma determinada espécie ao longo do tempo. Quando as equações que regem o sistema são não-lineares, é possível que o sistema apresente um comportamento caótico, que dentre outros aspectos, apresenta uma grande sensibilidade a variações das condições iniciais.

O intuito deste trabalho foi o estudo dos conceitos básicos de sistemas dinâmicos e teoria do caos, e aplicação dos conceitos para o estudo da dinâmica do pêndulo amortecido forçado, um sistema físico de simples descrição, mas que apresenta comportamento caótico.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, descrevemos a teoria estudada durante o trabalho.

2.1 Iterações e sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico consiste em um sistema cujo próximo estado é definido pelas suas condições atuais. Podem ser divididos em dois casos, o caso contínuo e o caso discreto. No caso contínuo o sistema é geralmente descrito por um sistema de equações diferenciais, enquanto no caso discreto pode ser descrito por uma equação de recorrência: $x_{n+1} = f(x_n)$

Inicialmente estudaremos funções discretas, onde mesmo funções relativamente simples podem exibir um comportamento bastante complexo quando iteradas um grande número de vezes. Um exemplo clássico de tal função é a função quadrática: $f_c(x) = x^2 + c$

O valor fixado c é denominado o parâmetro da função, e determina em grande parte seu comportamento. Para observar a influência do parâmetro, vamos tomar dois valores iniciais bastante próximos para diferentes valores de c , e comparar os valores obtidos para a iteração continuada da função: (tal conjunto de valores é a *órbita*)

c = 0.25			c = -0.8			c = -1.8		
Iteração	0	0.0001	Iteração	0	0.0001	Iteração	0	0.0001
0	0.00000	0.00010	0	0.00000	0.00010	0	0.00000	0.00010
1	0.25000	0.25000	1	-0.80000	-0.80000	1	-1.80000	-1.80000
2	0.31250	0.31250	2	-0.16000	-0.16000	2	1.44000	1.44000
3	0.34766	0.34766	3	-0.77440	-0.77440	3	0.27360	0.27360
4	0.37086	0.37086	4	-0.20030	-0.20030	4	-1.72514	-1.72514
5	0.38754	0.38754	5	-0.75988	-0.75988	5	1.17612	1.17612
...
100	0.49060	0.49060	100	-0.27639	-0.27639	100	0.77380	-1.19221
101	0.49069	0.49069	101	-0.72361	-0.72361	101	-1.20124	-0.37865
102	0.49078	0.49078	102	-0.27639	-0.27639	102	-0.35703	-1.65663
103	0.49086	0.49086	103	-0.72361	-0.72361	103	-1.67253	0.94442
104	0.49095	0.49095	104	-0.27639	-0.27639	104	0.99735	-0.90808
105	0.49103	0.49103	105	-0.72361	-0.72361	105	-0.80530	-0.97539
...
9995	0.49990	0.49990	9995	-0.72361	-0.72361	9995	-0.05524	-1.79080
9996	0.49990	0.49990	9996	-0.27639	-0.27639	9996	-1.79695	1.40696
9997	0.49990	0.49990	9997	-0.72361	-0.72361	9997	1.42903	0.17955
9998	0.49990	0.49990	9998	-0.27639	-0.27639	9998	0.24211	-1.76776
9999	0.49990	0.49990	9999	-0.72361	-0.72361	9999	-1.74138	1.32498

Tabela 1: Iterações da função $f_c(x) = x^2 + c$ para três valores de c

Para o parâmetro $c = 0.25$, temos que os valores de ambas as órbitas convergem (o valor correto é 0.5, a convergência é lenta). Já para $c = -0.8$, o comportamento para ambos os valores iniciais é o mesmo, mas agora a convergência ocorre para uma órbita de período 2. Já para $c = -1.8$, após um número razoável de iterações, note que as órbitas não convergem. Além disso, as órbitas para cada valor inicial tornam-se totalmente diferentes. Isto é

denominado *dependência sensível das condições iniciais*, sendo um dos aspectos essenciais para um comportamento caótico. A análise da órbita pode ser mais facilmente estudada com o uso da análise gráfica.

2.2 Análise gráfica

A análise gráfica consistem em desenhar em um mesmo gráfico evolução de um sistema dinâmico para algumas condições iniciais. Podemos então ver de maneira rápida se a órbita para o valor é atraída para algum ciclo e comparar órbitas de valores iniciais diferentes.

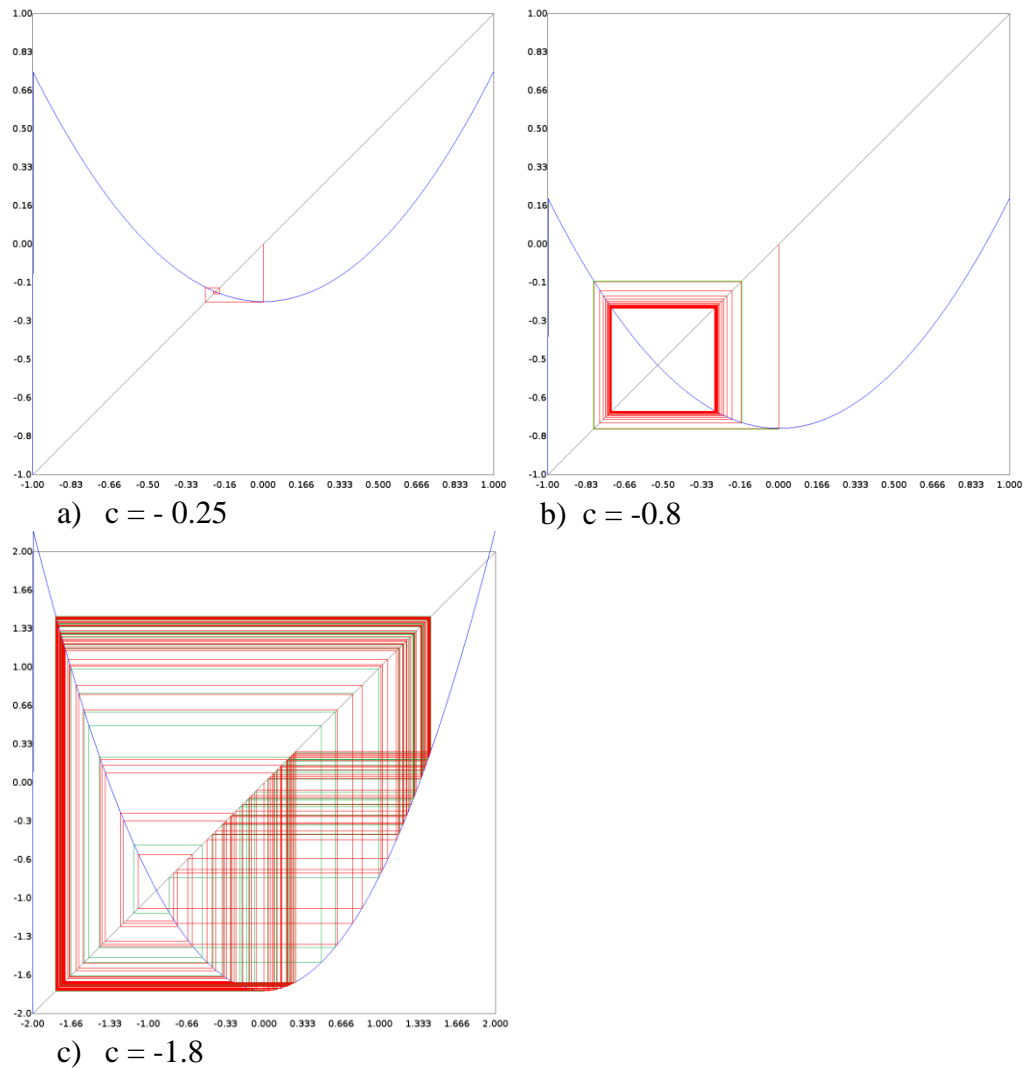


Figura 1: Análise gráfica de $f_c(x) = x^2 + c$. No caso a) ocorre atração para um ponto fixo, no caso b) para um ciclo de tamanho 2, enquanto no caso c) não é atraído para nenhum ciclo.

A linha verde se refere ao 0 e a vermelha ao 0.0001

Pela figura podemos perceber de maneira qualitativa os mesmos padrões descritos anteriormente. Porém temos um gráfico para cada caso de parâmetro c . Para a análise da função em relação ao parâmetro c , podemos usar o chamado diagrama de bifurcação.

2.3 Diagrama de bifurcação

Para uma visão mais geral do comportamento da função ao longo de um parâmetro c pode-se usar o diagrama de bifurcação. Nele para cada valor de c em um dado intervalo calcula-se a órbita para um mesmo valor inicial, plotando no gráfico os pontos finais.

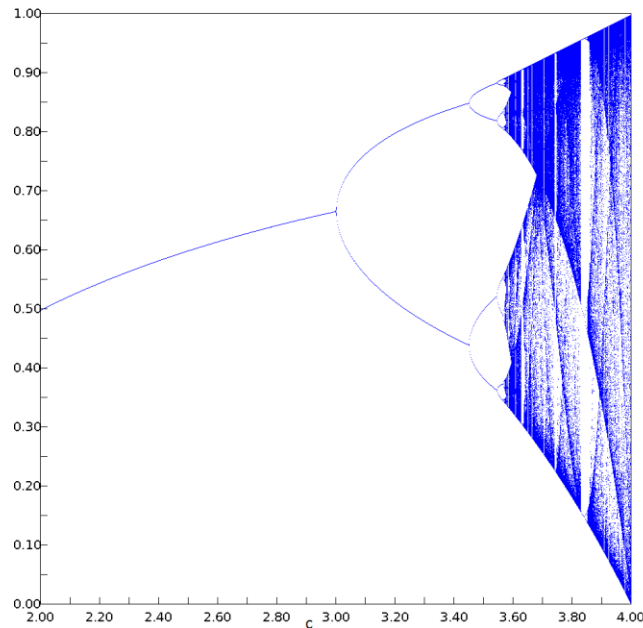


Figura 2: Diagrama de bifurcação de $f_c(x) = cx(1 - x)$

Desta forma o diagrama representa o comportamento assintótico da função. Nele podemos ver trechos de comportamento periódico de vários períodos como 1,2 e 4 e regiões aparentemente aperiódicas. Porém se ampliarmos essas regiões percebemos que elas escondem diversas regiões periódicas. De fato, para qualquer tamanho de período existe uma região com esse período, porém entre cada uma dessas regiões existem trechos de comportamento aperiódico.

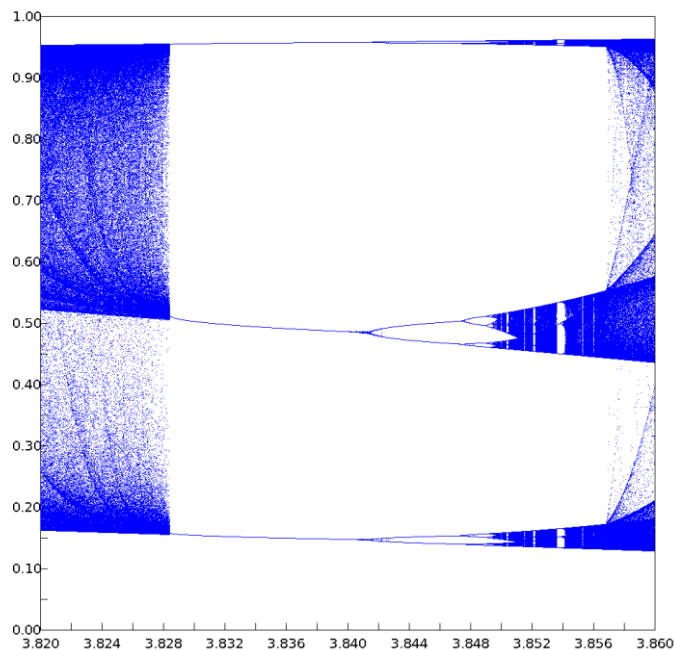


Figura 3: Ampliação do diagrama de bifurcação de $f_c(x) = cx(1 - x)$. O intervalo contém região de período 3.

Nesse intervalo se observa uma região com período 3, 6, 12 e assim por diante. Esse é outro fato característico de diagramas de bifurcação: ocorre a chamada bifurcação de período, onde ocorre a dobra do período anterior com a variação de c .

2.4 Números Complexos

Até o momento foram estudadas apenas funções de uma dimensão. Porém nada impede o sistema dinâmico depender de mais de uma variável. No caso de duas variáveis pode ser útil a utilização de números complexos para o estudo desses sistemas.

Dois sistemas são bastante comuns, e são descritos a seguir.

Definimos o *Conjunto de Julia* (ou *Julia Set*) de uma função f como a fronteira dos pontos do plano complexo cuja órbita diverge (ou seja, o módulo da órbita tende a infinito) e os pontos x nos quais a órbita não diverge. Aqui estudaremos o caso da função $f_c(x) = cx(1 - x)$, para c fixado.

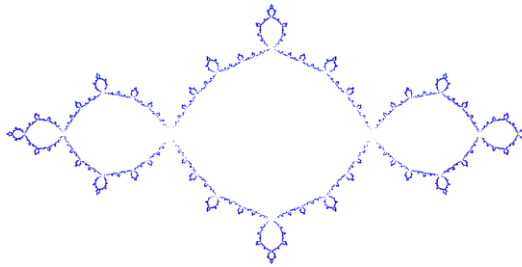


Figura 4: Julia Set para $c = 1$.
Para esse valor o conjunto é conexo

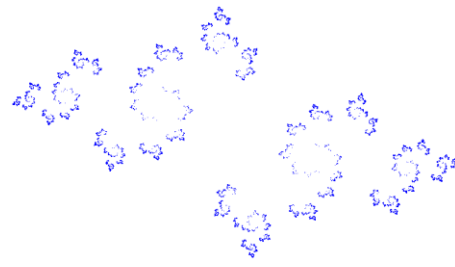


Figura 5: Julia Set para $c = -0.8 + 0.4i$.
Para esse valor o conjunto é desconexo

Nas figuras acima vemos dois Julia Sets que apresentam características em comum, mas que apresentam diferenças essenciais. Uma característica comum é que ambos apresentam a chama *auto-semelhança* na qual a figura se repete nela mesma, em menor escala. Essa é uma característica de muitos *fractais*, e inclusive pode ser vista no diagrama de bifurcação já mencionado. A diferença entre os dois conjuntos é que o primeiro é *conexo*, limitando uma área interna. Nessa área interna todos os pontos são não divergentes. Já no caso do segundo conjunto, os pontos não são conexos. Dessa forma não há pontos juntos um dos outros, apesar de eles poderem estar arbitrariamente próximos.

Uma maneira rápida de descobrir se o Julia Set é ou não conexo é calcular a órbita do ponto 0. Se esta não diverge então o conjunto será conexo, e caso contrário será não conexo.

Os pontos nos quais o conjunto de Julia são conexos forma o chamado *Conjunto de Mandelbrot* (ou *Mandelbrot Set*). São os pontos c nos quais a função $f_c(x) = cx(1 - x)$ não divergem, com o ponto inicial nulo.

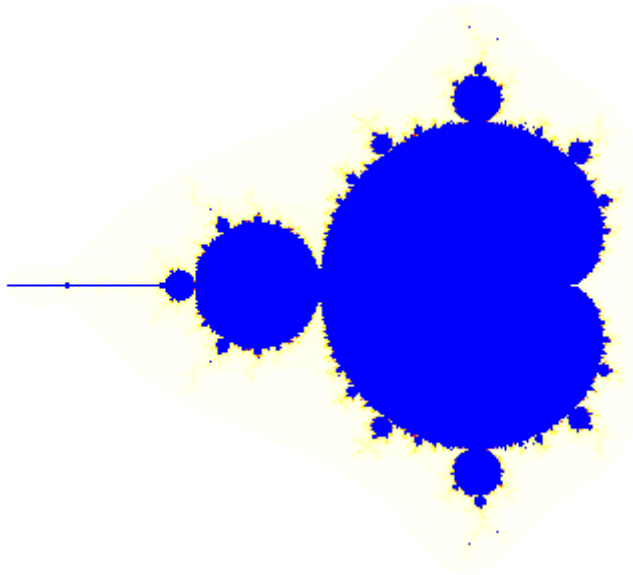


Figura 6: Mandelbrot Set

O Mandelbrot Set apresenta a mesma característica de auto-semelhança, e apesar de não parecer é conexo. A auto-semelhança pode ser percebida pela ampliação do conjunto nas figuras abaixo.

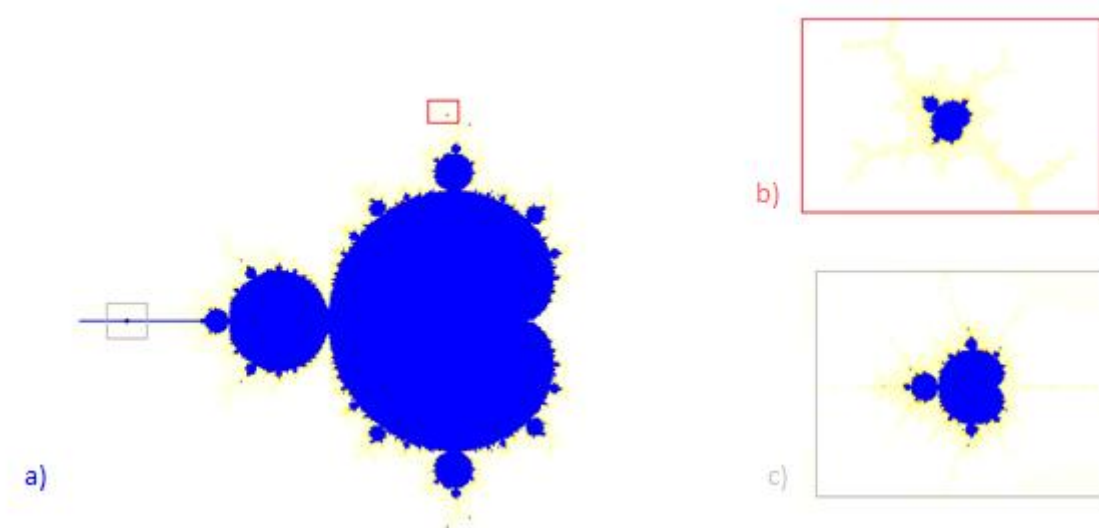


Figura 7: Ampliação do Mandelbrot Set. A figura b) é uma ampliação da parte vermelha de a) e c) da parte cinza de a)

2.5 Dimensão e Fractais

Foi citado anteriormente que figuras como os diagramas de bifurcação e os Julia Sets são *fractais*. Antes de uma definição do que é um fractal, como já foi dito, uma propriedade de fractais é a auto-semelhança sobre ampliação. Podemos construir fractais bem mais simples através de “iterações geométricas” tendo em mente esta propriedade.

Um exemplo é a *Curva de Koch*, obtida por sucessiva divisão dos triângulos de triângulos aos lados da figura. Ou seja, iniciando com um segmento de tamanho 1, para cada segmento contido na figura (de tamanho d),

adicionamos sobre o intervalo um triângulo equilátero de lado $d/3$, e removemos este intervalo, infinitamente.

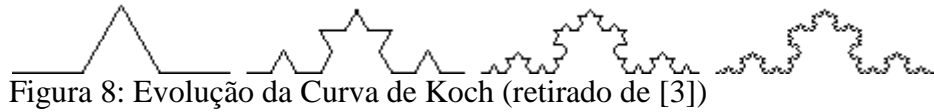


Figura 8: Evolução da Curva de Koch (retirado de [3])

Percebe-se que o perímetro da figura diverge para infinito, enquanto sua área converge.

A propriedade de auto-semelhança da Curva de Koch é obtida por sua própria construção. Sobre cada um dos lados é construída uma figura idêntica (apenas reduzida de uma fração) a original. Assim essa curva apresenta fortes características de um fractal. Para definirmos mais rigorosamente um fractal, é antes necessário o conceito de dimensão.

A *dimensão topológica* de um objeto em um espaço considerado é definida como $1 +$ a dimensão do objeto de menor dimensão necessário para separar completamente quaisquer duas partes do conjunto, onde o conjunto vazio tem dimensão -1 por definição. Assim, um ponto tem dimensão nula (pois não é necessário nada para separá-lo), uma reta tem dimensão 1 (um ponto para separar) e um plano tem dimensão 2 (uma reta para separar), e assim por diante. Se o conjunto de pontos não for conexo, toma-se como dimensão a maior das dimensões de cada um de seus componentes conexos. Para o caso da Curva de Koch, a dimensão topológica é 1 , pois é necessário apenas um ponto para separá-la.

Uma outra definição de dimensão é denominada *dimensão de Hausdorff*, sendo definida pela razão entre o logaritmo do número de discos de raio r necessários para cobrir a figura ($N(r)$) pelo logaritmo de $1/r$, quando o raio tende a zero. Ou seja:

$$D_h = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log 1/r}$$

A dimensão de Hausdorff de um segmento de reta de tamanho d é 1 , pois precisamos de d/r discos de raio r .

Para a curva de Koch, são necessários 1 disco de raio 1 , ou 3 discos de raio $1/3$. Mais geralmente são necessários 4^n discos de raio $(1/3)^n$. Logo a dimensão é:

$$D_h = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log 1/r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \log \left(\frac{4}{3} \right) = 1,26186\dots$$

Obtemos um número real, não inteiro.

Com essas definições, podemos definir um fractal como um conjunto de pontos cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que sua dimensão topológica. Isto ocorre com a curva de Koch Julia set e o Mandelbrot Set, conforme o esperado.

2.6 Expoente de Lyapunov e entropia

O expoente de Lyapunov mede o crescimento médio da distância entre dois pontos inicialmente próximos. Dessa forma, se o crescimento for exponencial, então mesmo para pontos inicialmente próximos temos divergência, caracterizando comportamento caótico. Mais formalmente, para o caso uni-dimensional o expoente pode ser definido como:

$$\lambda = \lim_{\substack{\Delta x_0 \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \log \frac{|\Delta x(X_0, t)|}{|\Delta x_0|}$$

Dependendo do valor de λ o comportamento do sistema é diferente:

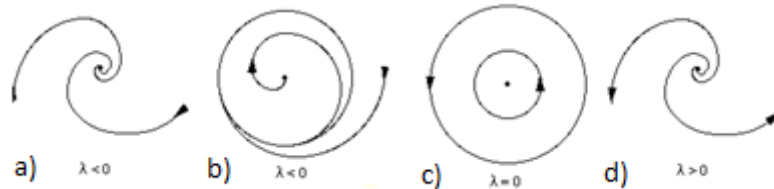


Figura 9: Comportamento do sistema para cada valor de λ . No caso a) e b) o expoente negativo indica um sistema dissipativo, convergindo para um mesmo ponto. No caso c) o expoente nulo indica um sistema estável. No caso d) o expoente positivo indica um sistema divergente, caótico.

Calculando então o valor de λ para $f_c(x) = cx(1-x)$ obtemos o gráfico:

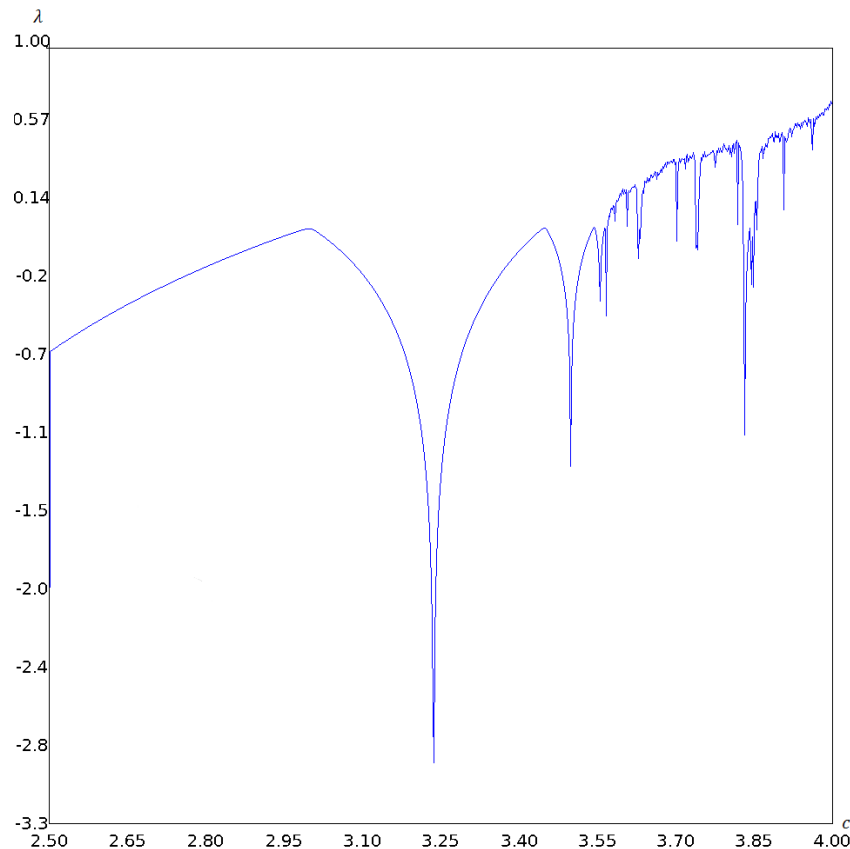


Figura 10: Expoente de Lyapunov para $f_c(x) = cx(1-x)$. Os pontos com expoente negativo coincidem com as regiões periódicas.

Comparando esse gráfico com o diagrama de bifurcação vemos que os valores nos quais o expoente é positivo coincidem com os pontos caóticos, e os pontos de menor valor local com as regiões periódicas.

A entropia por sua vez a entropia é outra forma de avaliar se o comportamento é caótico. A entropia é uma medida de dispersão da órbita, de forma que quanto maior for essa dispersão maior a chance desse ponto ser caótico. Se dividirmos o intervalo da órbita em N intervalos iguais, e em cada intervalo termos p_i pontos da órbita, a entropia S é:

$$S = - \sum_{i=1}^N p_i \log_e p_i$$

Calculando esse valor para a função $f_c(x) = cx(1 - x)$, obtemos:

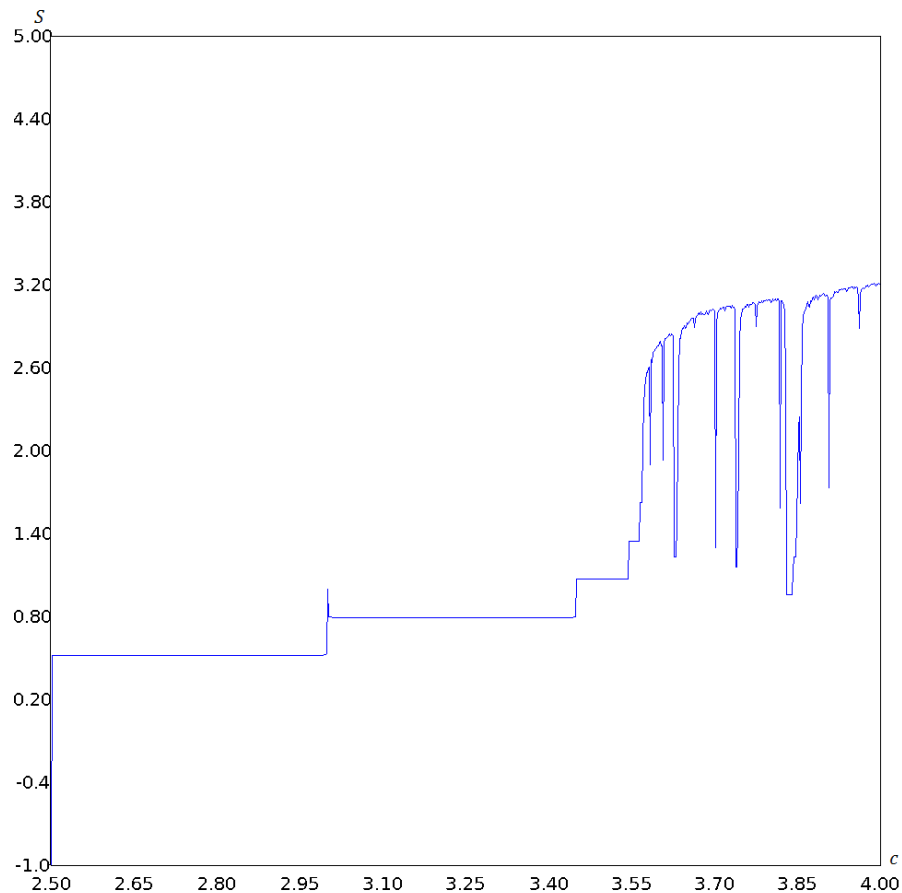


Figura 11: Entropia para a função $f_c(x) = cx(1 - x)$. Os pontos de mínimo local coincidem com as regiões periódicas.

Novamente vemos que as regiões periódicas são o mínimo local da função de entropia.

Dessa vez, porém é possível observar mais propriedades desse gráfico: quanto maior o período, maior a entropia. Isso é de se esperar, uma vez que com o aumento do período os pontos se dividem em mais regiões, aumentando a dispersão e conseqüentemente a entropia.

3. DESENVOLVIMENTO

Nesse capítulo estudaremos o sistema do pêndulo amortecido forçado. O sistema de equações que descrevem o pêndulo o é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\omega}{q} - \sin \theta + g \cos \varphi \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_d\end{aligned}$$

3.1 Espaço de fase

Estudaremos agora o pêndulo usando o espaço de fase. O espaço de fase é um espaço de coordenadas ortogonais necessárias para a descrição do sistema dinâmico. Assim a curva no espaço descreve o desenvolvimento do sistema, mostrando a relação entre as variáveis.

Por exemplo temos os dois espaços de fase para o pêndulo amortecido, cuja equação é: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0$

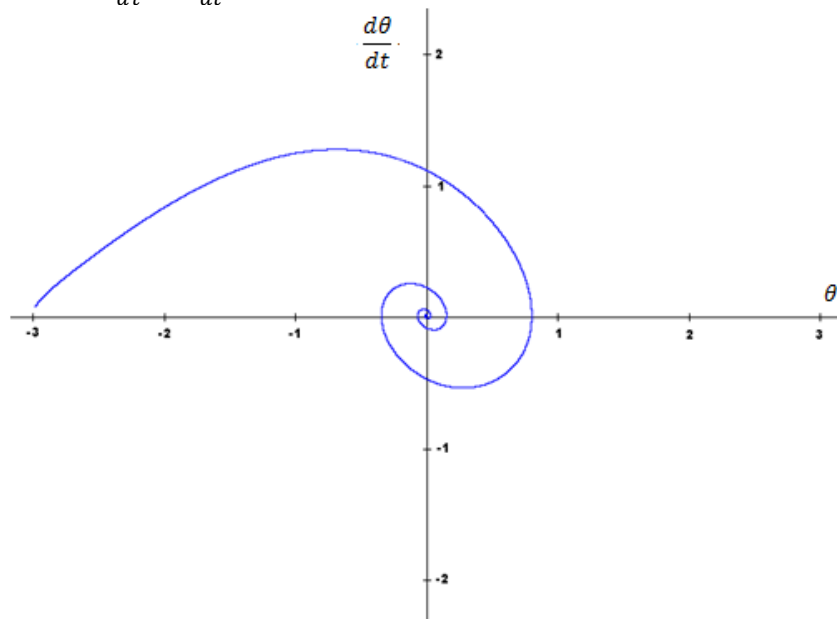


Figura 12: Espaço de fase para o pêndulo amortecido. Como o sistema converge para o 0, é um sistema dissipativo.

Percebemos que o sistema converge para o ponto (0,0). Isso é coerente com o esperado, uma vez que como o sistema é amortecido espera-se que convirja para o ponto nulo.

Porém a análise do pêndulo forçado é mais complicada. Estudaremos então o espaço de fase para vários valores das constantes. Os eixos usados foram θ e $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, e $\omega_d = 2/3, q = 2$

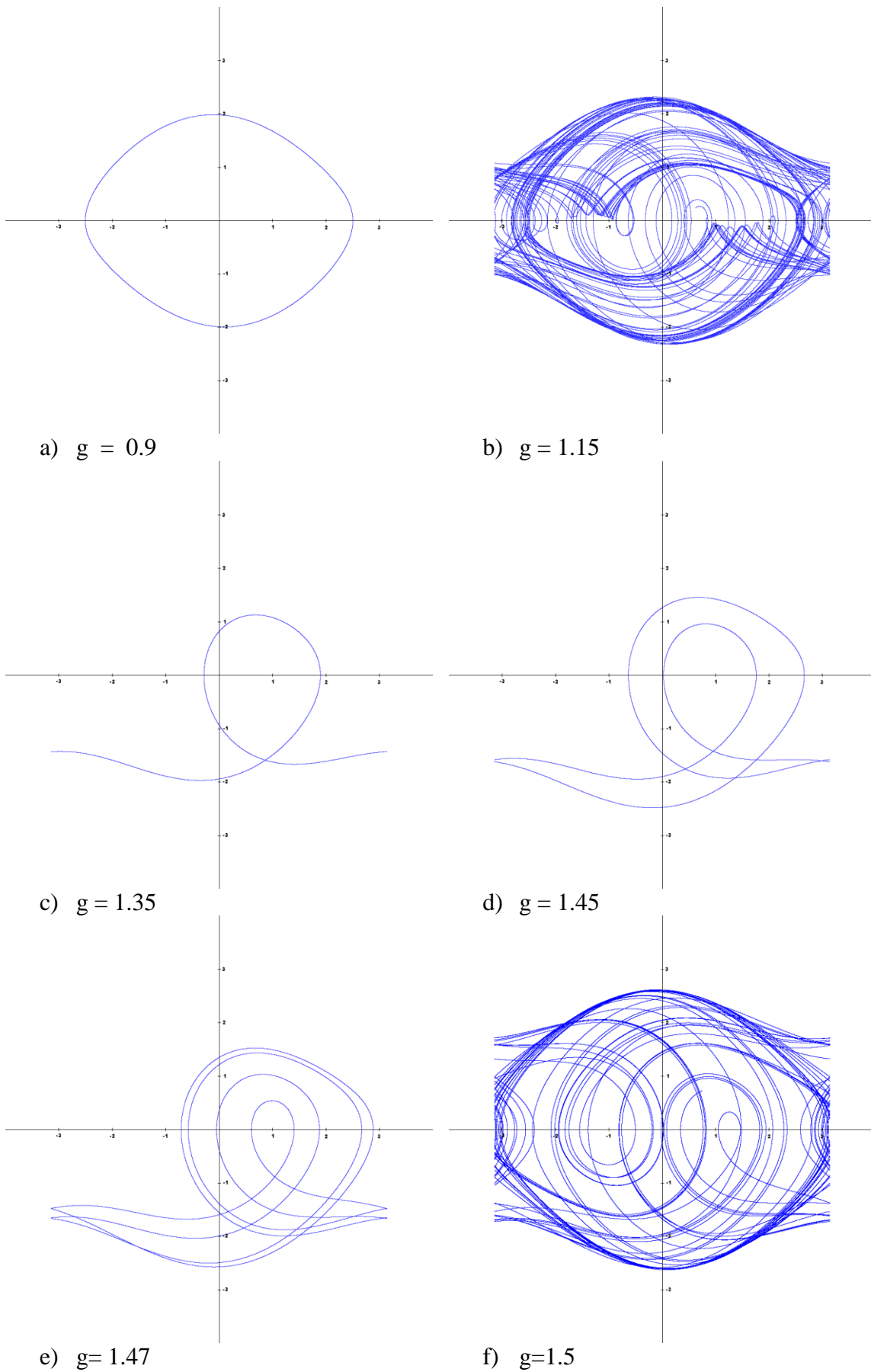


Figura 13: Espaço de fase do pêndulo para vários valores de g . Os casos a),c),d) e e) são periódicos enquanto b) e f) são caóticos.

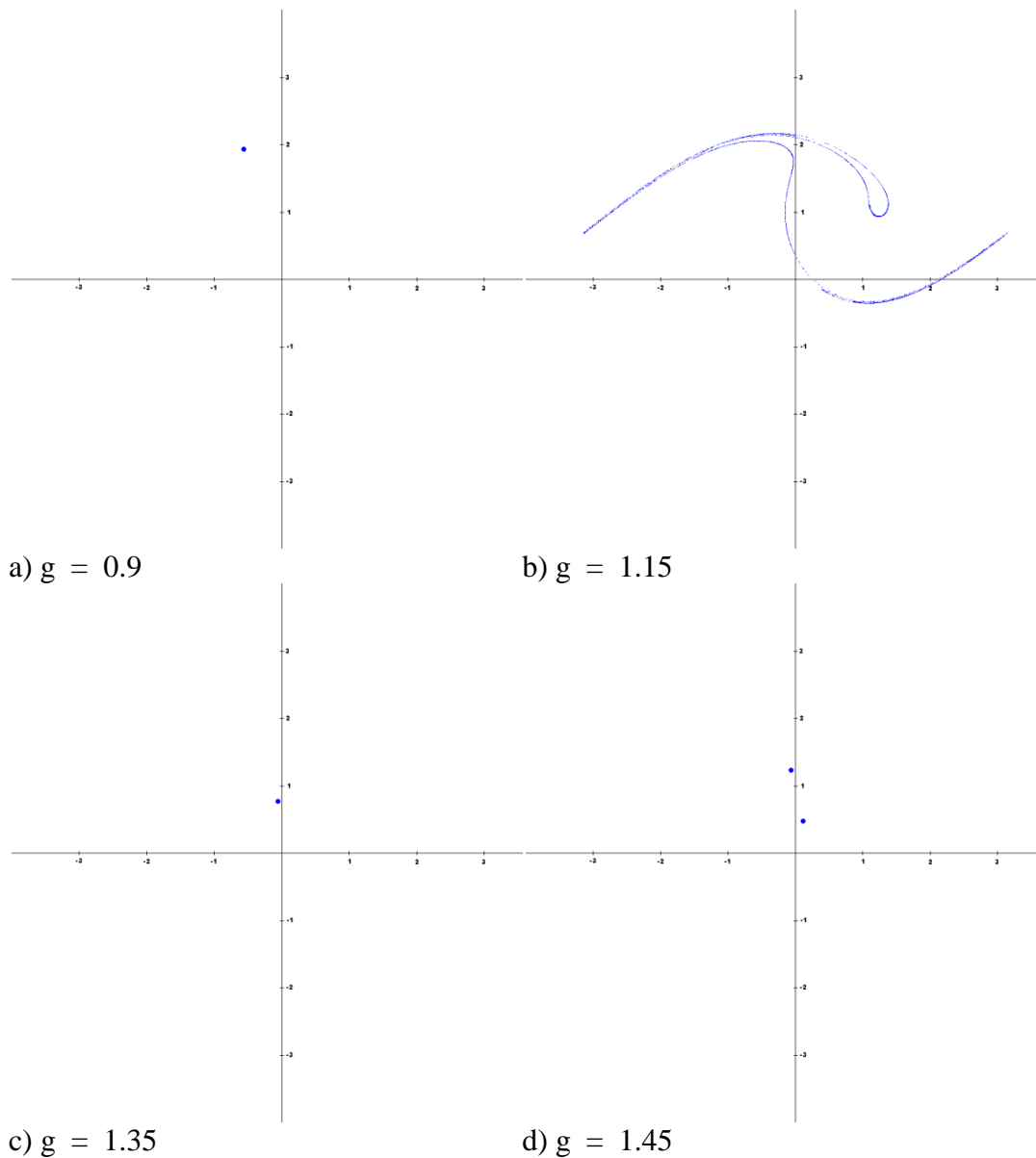
Analisando os espaços de fase percebemos que nos casos a,c,d,e o sistema periódico, de período 1,1,2 e 4 respectivamente. Já nos outros casos não é percebido uma periodicidade do sistema, indicando que para esses valores de g o sistema é caótico.

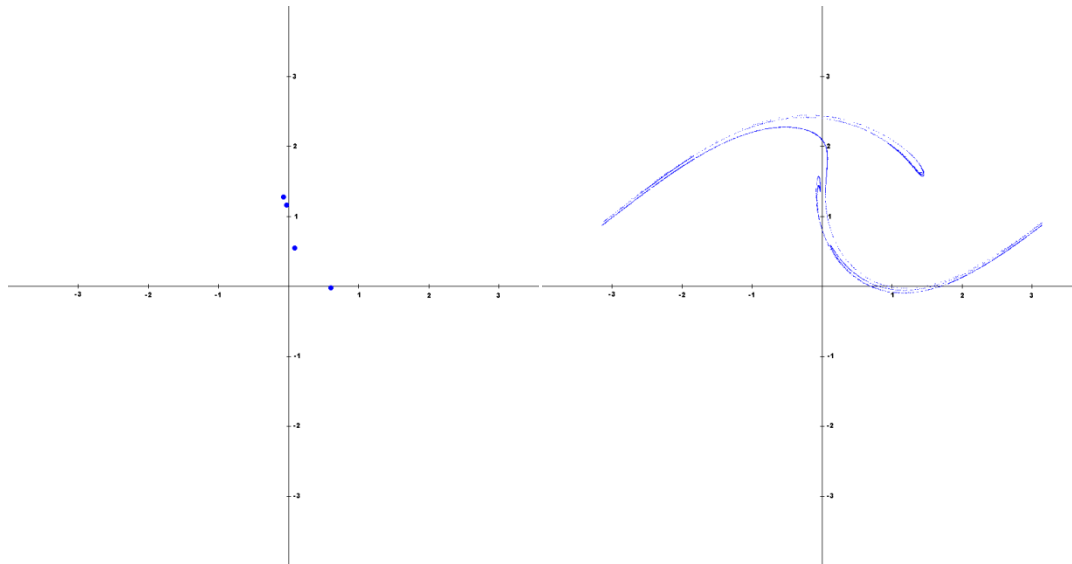
O mesmo comportamento pode ser analisado com o auxílio de outra ferramenta, a chamada seção de Poincaré.

3.2 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré é obtida de maneira análoga ao espaço de fase, porém apenas pontos obtidos a cada dado intervalo de tempo são usados para a montagem do gráfico. Dessa forma pode-se ver mais claramente o período do sistema.

Segue então as seções para os mesmos valores acima, obtidas cada período igual ao de ω_d





e) $g = 1.47$

f) $g = 1.5$

Figura 14: Seção de Poincaré do pêndulo para vários valores de g . Os casos a),c),d) e e) são periódicos e os casos b) e f) são caóticos.

Porém tanto o espaço de fase quanto a seção de Poincaré mostram o comportamento apenas para um valor fixado de g . Para a análise com mais valores de g é necessário o uso do diagrama de bifurcação.

3.3 Diagrama de bifurcação

Vamos plotar o diagrama de bifurcação do pêndulo ao longo da variável g , para dois valores de q . Para $\omega_d = 2/3$:

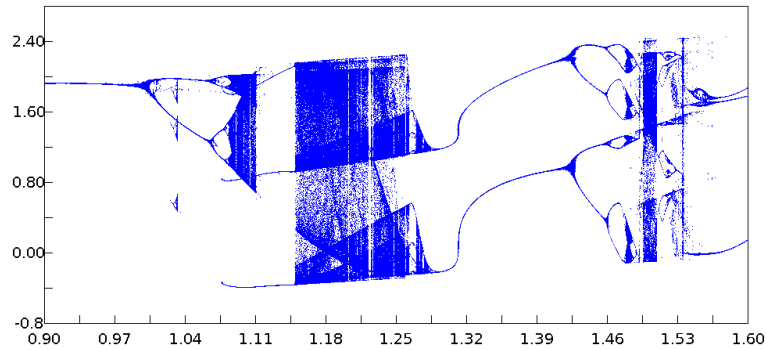


Figura 15: Diagrama de bifurcação do pêndulo para $q=2$

E para $q=4$:

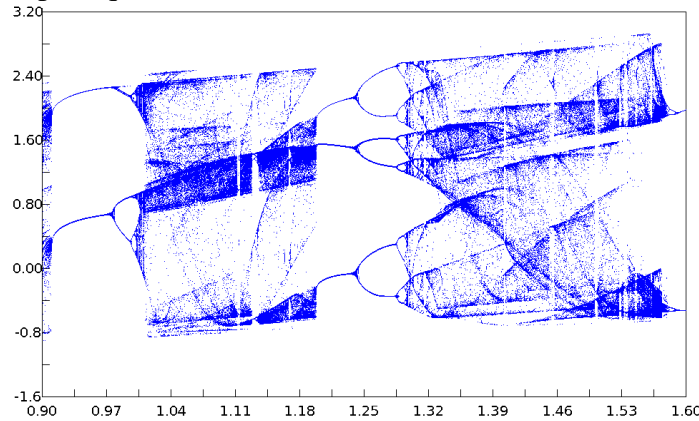


Figura 16: Diagrama de bifurcação do pêndulo para $q=4$

Analisando as figuras percebemos que há várias regiões caóticas e regiões periódicas entre elas, e assim como no diagrama da função $f_c(x) = cx(1 - x)$ observa-se regiões de bifurcação do período.

3.4 Expoente de Lyapunov

Podemos generalizar o conceito do expoente de Lyapunov visto anteriormente para um sistema de n- dimensões. Nesse caso teríamos n expoentes, um para cada um dos eixos. Dessa forma temos:

$$\lambda_i = \lim_{\substack{L_i \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \log \frac{|L_i(t)|}{|L_i(0)|}$$

Com L_i sendo a distância. Dessa forma obtemos os gráficos dos valores dos expoentes para valores dos coeficientes, mas com $\omega_d = 2/3$

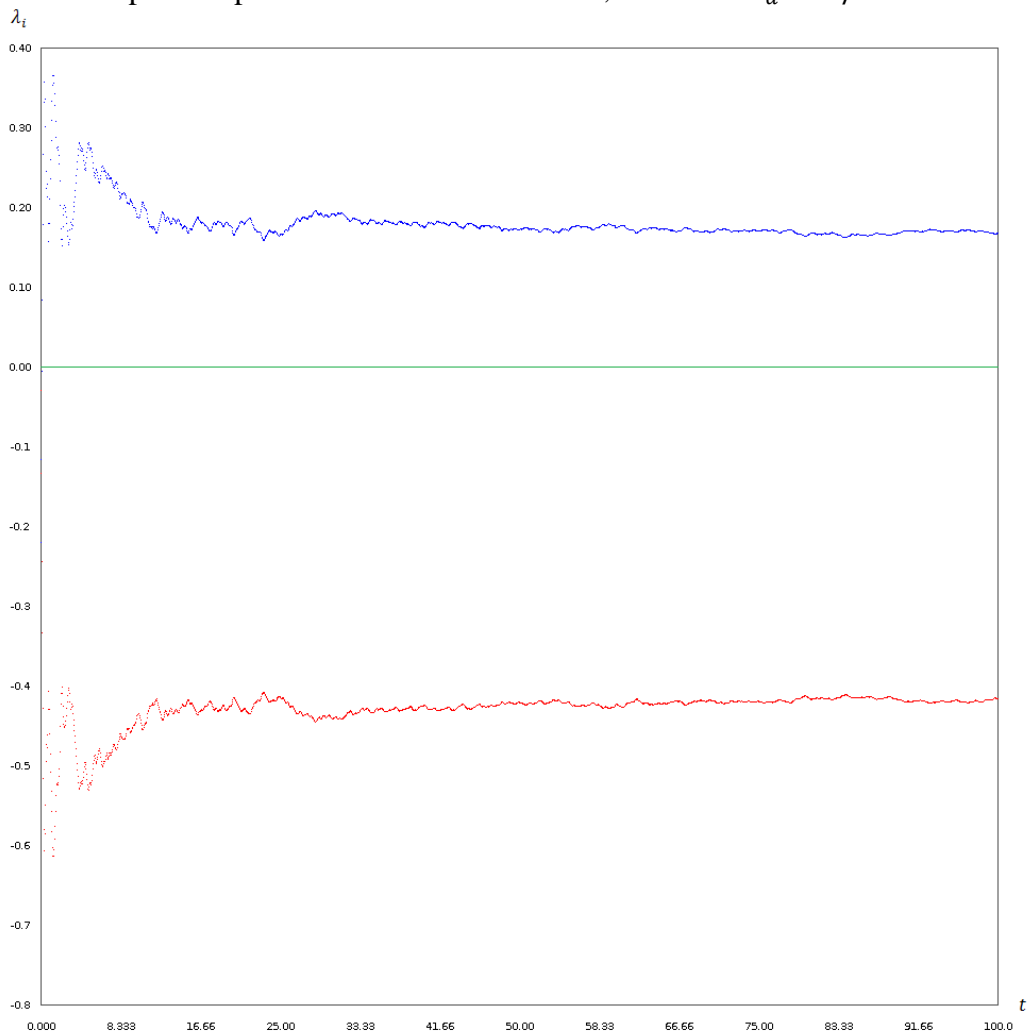


Figura 17: Expoentes de Lyapunov com $g = 1.4954$ e $q = 4$. A presença de um expoente positivo acarreta em um sistema caótico

Para esses valores vemos que um dos expoentes assume valor positivo. Nesse caso um dos eixos diverge exponencialmente ao longo do tempo, de modo que ele é sensível as condições iniciais. Portanto nesse caso ele é caótico.

Porém se mudarmos os valores podemos obter sistema não caótico.

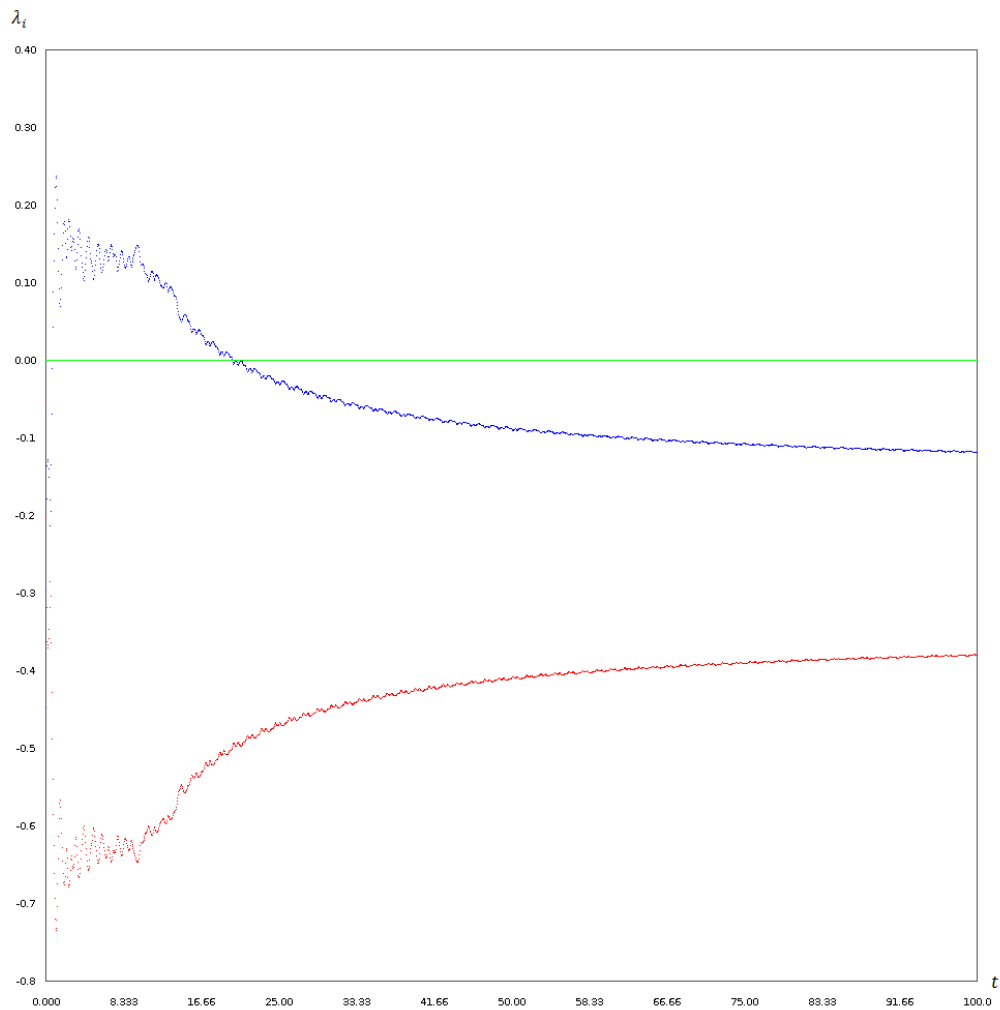


Figura 18: Expoentes de Lyapunov para $g=1.125$ e $q=2$. A ausência de um expoente positivo acarreta em um sistema não caótico.

Nesse caso os expoentes são todos não positivos, caracterizando um sistema não caótico.

Os expoentes de Lyapunov são de fundamental importância para a análise de sistemas, indicando de maneira relativamente fácil se o sistema apresenta comportamento caótico nessa configuração ou não.

4. DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS

Os programas utilizados para as simulações foram feitos na linguagem C e C++, por serem linguagens que o autor já possuía uma boa familiaridade. Os programas foram desenvolvidos de modo geral com o compilador GNU C++ Compiler 4.x (Linux) no editor Code::Blocks 8.x. Como o C não possui bibliotecas gráficas padrão, foi utilizado o conjunto de bibliotecas SDL (Simple Direct MediaLayer), que possui implementações em várias plataformas.

Alguns dos programas foram baseados nos descritos em [1].

5. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Vários conceitos referentes a sistemas dinâmicos e medida de caos foram estudados, junto com sua análise a sistemas físicos, como o caso do pêndulo. Mesmo um sistema relativamente simples já apresenta comportamento difícil de se prever, caracterizando um sistema caótico. Comportamentos parecidos são vistos em outros sistemas dinâmicos.

A continuação do trabalho consiste no estudo de mais alguns elementos da dinâmica caótica, com foco na teoria de sincronização de sistemas dinâmicos e aplicação desses conceitos.

6. BIBLIOGRAFIA

[1]: Baker, G.L. & Gollub, J. P. **Chaotic Dynamics**. Cambridge University Press 1996

[2]: Devaney, Robert L. **Chaos, Fractals and Dynamics**. Addison-Wesley, 1990

[3]: Elert, Glenn. **The Chaos Hypertextbook** (<http://hypertextbook.com/chaos>), acessado em 27/06/09